

Cahier de calcul

— réponses —



Margarita philosophica (La perle philosophique), Gregor REISCH (1508)

Cette gravure, extraite d'un manuel d'université de l'époque, représente Arithmetica, allégorie des mathématiques, arbitrant une compétition entre Boèce, qui utilise les chiffres indo-arabes, et Pythagore, qui utilise un boulier.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Le pictogramme 🕒 de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

L'illustration de la couverture vient de Wikimedia.

Sommaire

1. Fractions.....	1
2. Puissances.....	2
3. Calcul littéral.....	3
4. Racines carrées.....	4
5. Expressions algébriques.....	5
6. Équations du second degré.....	6
7. Exponentielle et logarithme.....	7
8. Trigonométrie.....	8
9. Dérivation.....	10
10. Primitives.....	11
11. Calcul d'intégrales.....	13
12. Intégration par parties.....	14
13. Changements de variable.....	15
14. Intégration des fractions rationnelles.....	16
15. Systèmes linéaires.....	17
16. Nombres complexes.....	18
17. Trigonométrie et nombres complexes.....	19
18. Sommes et produits.....	20
19. Coefficients binomiaux.....	21
20. Manipulation des fonctions usuelles.....	22
21. Suites numériques.....	23
22. Développements limités.....	24
23. Arithmétique.....	25
24. Polynômes.....	26
25. Décomposition en éléments simples.....	27
26. Calcul matriciel.....	28
27. Algèbre linéaire.....	30
28. Équations différentielles.....	31
29. Séries numériques.....	32
30. Structures euclidiennes.....	33
31. Groupes symétriques.....	34
32. Déterminants.....	35
33. Fonctions de deux variables.....	36

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) $\frac{4}{5}$

1.1 b) 2^5

1.1 c) 3

1.1 d) $-2 \times 3^{3k-2}$

1.2 a) $\frac{1}{6}$

1.2 b) $\frac{7}{15}$

1.2 c) 9

1.2 d) $\frac{1}{9}$

1.3 a) 247

1.3 b) $\frac{203}{24}$

1.3 c) $\frac{-10}{3}$

1.3 d) $1\,000$

1.4 $\frac{16}{35}$

1.5 a) $2\,022$

1.5 b) $\frac{1}{2}$

1.5 c) 1

1.5 d) 2

1.6 a) $\frac{-1}{n(n+1)^2}$

1.6 b) $-\frac{ab}{a-b}$

1.6 c) $\frac{3}{2}n$

1.7 $\frac{n^3+n}{n+1}$

1.8 a) $4 + \frac{5}{6}$

1.8 b) $1 + \frac{1}{k-1}$

1.8 c) $3 + \frac{5}{x-2}$

1.9 $2t$

1.10 a) $\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$

1.10 b) $\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$

1.10 c) $\frac{125}{25} = \frac{105}{21}$

1.11 Non

1.12 $A > B$

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) 10^8

2.1 b) 10^{15}

2.1 c) 10^2

2.1 d) 10^{-2}

2.1 e) 10^4

2.1 f) 10^{-8}

2.2 a) 15^4

2.2 b) 5^{-6}

2.2 c) 2^7

2.2 d) $(-7)^{-2}$

2.2 e) 3^5

2.2 f) 3^{28}

2.3 a) $2^{-4} \cdot 3^{-1}$

2.3 b) $2^{21} \cdot 3$

2.3 c) 2

2.3 d) $2^{38} \cdot 3^{26}$

2.4 a) 8

2.4 b) 11

2.4 c) 3^{10}

2.4 d) $2^6 \cdot 5$

2.5 a) $\frac{x}{x+1}$

2.5 b) $\frac{1}{x-2}$

2.5 c) $\frac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\frac{2}{x-2}$

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) $8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$

3.1 b) $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$

3.1 c) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$

3.1 d) $x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

3.1 e) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$

3.1 f) $x^4 + x^2 + 1$

3.2 a) $-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4$

3.2 b) $-28 + 21x$

3.2 c) $2 + x^3 - x^4 - x^5$

3.2 d) $-1 - 3x - 3x^2 + x^3$

3.2 e) $1 + x^4$

3.2 f) $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$

3.3 a) $-6(6x + 7)$

3.3 b) $4(5x + 4)(-5x + 1)$

3.3 c) $2(3x - 4)(10x + 3)$

3.3 d) $-8(x + 1)(x + 16)$

3.4 a) $(x - 1)^2$

3.4 b) $(x + 2)^2$

3.4 c) $(x + 1)(x + 2)$

3.4 d) $3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)$

3.4 e) $2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)$

3.4 f) $-5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)$

3.5 a) $(x + y - z)(x + y + z)$

3.5 b) $3(14x + 3y)(-4x + y)$

3.5 c) $(x + 1)(y + 1)$

3.5 d) $(x - 1)(y - 1)$

3.5 e) $(x + y)(x + 1)^2$

3.5 f) $(a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2)$

3.6 a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

3.6 b) $-8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4)$

3.6 c) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

3.6 d) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

3.6 e) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) $\boxed{5}$
 4.1 b) $\boxed{\sqrt{3}-1}$
 4.1 c) $\boxed{-\sqrt{3}+2}$
 4.1 d) $\boxed{\sqrt{7}-2}$
 4.1 e) $\boxed{\pi-3}$
 4.1 f) $\boxed{|3-a|}$
 4.2 a) $\boxed{20}$
 4.2 b) $\boxed{9+4\sqrt{5}}$
 4.2 c) $\boxed{1+\sqrt{3}}$
 4.2 d) $\boxed{3+\sqrt{2}}$
 4.2 e) $\boxed{12\sqrt{7}}$
 4.2 f) $\boxed{12}$
 4.2 g) $\boxed{9-\frac{10}{3}\sqrt{2}}$
 4.2 h) $\boxed{10}$

4.3 a) $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}}$
 4.3 b) $\boxed{3-2\sqrt{2}}$
 4.3 c) $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$
 4.3 d) $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$
 4.3 e) $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$
 4.3 f) $\boxed{-\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$
 4.3 g) $\boxed{2\sqrt{2}}$
 4.3 h) $\boxed{50-25\sqrt{3}}$
 4.4 $\boxed{\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$
 4.5 a) $\boxed{\frac{x}{\sqrt{x-1}}}$
 4.5 b) $\boxed{x-\sqrt{x^2-1}}$

4.5 c) $\boxed{1+\sqrt{x-1}}$
 4.5 d) $\boxed{\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}}$
 4.5 e) $\boxed{\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$
 4.5 f) $\boxed{-4(x-1)^2}$
 4.6 a) $\boxed{\sqrt{2}}$
 4.6 b) $\boxed{2\sqrt{2}}$
 4.7 a) $\boxed{-11+5\sqrt{5}}$
 4.7 b) $\boxed{1+\sqrt{2}}$
 4.7 c) $\boxed{1+\sqrt{2}}$
 4.7 d) $\boxed{\sqrt{3}}$
 4.7 e) $\boxed{1+\sqrt{5}}$
 4.7 f) $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$
 4.8 $\boxed{1}$

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a) $7a^2 + 12a + 7$

5.1 b) $a^2 - 1$

5.1 c) $4a^2 - a - 3$

5.1 d) $-a^2 + 1$

5.2 a) $8 + 6i$

5.2 b) $8 - 6i$

5.2 c) $18 - 26i$

5.2 d) $-9 - 46i$

5.3 a) $39 - 18i$

5.3 b) 2197

5.3 c) $-4 + 43i\sqrt{5}$

5.3 d) 1

5.4 a) 3

5.4 b) 1

5.4 c) 1

5.4 d) 0

5.4 e) -1

5.4 f) 31

5.5 a) $a^2 + 2$

5.5 b) $a^3 + 3a$

5.5 c) $a^4 + 4a^2 + 2$

5.6 a) $a^2 - 2b$

5.6 b) $ab - 3c$

5.6 c) $a^3 - 3ab + 3c$

5.6 d) $ab - c$

5.6 e) ac

5.6 f) $-2ac + b^2$

5.7 a) $a^2b - ac - 2b^2$

5.7 b) ... $a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$

5.7 c) 0

5.7 d) 1

5.7 e) a

Fiche n° 6. Équations du second degré

Réponses

- 6.1 a) $3, 3$
 6.1 b) $-1/3, -1/3$
 6.1 c) $2, -6$
 6.1 d) $2, 3$
 6.1 e) $0, \text{ donc } 5$
 6.1 f) $0, \text{ donc } -3/2$
 6.1 g) $\emptyset$
 6.1 h) $1 \text{ donc } -5$
 6.1 i) $1 \text{ donc } 8/3$
 6.1 j) $-1 \text{ donc } -19/5$
 6.2 a) $6, 7$
 6.2 b) $-3, -5$
 6.2 c) $-7, -11$
 6.2 d) $-3, 11$
 6.2 e) a, b
 6.2 f) $a - b, a + b$
 6.3 a) $2/3$
 6.3 b) $-2/7$
 6.3 c) $-1/m$
 6.3 d) $2m/(m + 3)$
 6.4 a) $1 \text{ donc } (a - b)/(b - c)$
 6.4 b) $1 \text{ donc } c(a - b)/(a(b - c))$

- 6.4 c) $m \text{ donc } -(m + a + b)$
 6.4 d) $m \text{ donc } m(a - b)/(b - c)$
 6.4 e) $m \text{ donc } ab/m$
 6.4 f) $a + b \text{ puis } 2ab/(a + b).$
 6.5 a) $x^2 - 22x + 117 = 0$
 6.5 b) $x^2 - 6x - 187 = 0$
 6.5 c) $x^2 - 4x + 1 = 0$
 6.5 d) $x^2 - 2mx + 3 = 0$
 6.5 e) $2x^2 - (4m + 1)x + (2m^2 + m - 15) = 0$
 6.5 f) $m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0$
 6.6 a) $m = -3/4 \text{ et } x = 3/4$
 6.6 b) ... $m = -1 \text{ et } x = -2, \text{ ou } m = 7 \text{ et } x = 2/3$
 6.6 c) $m = 1 \text{ et } x = -1 \text{ ou } m = -1 \text{ et } x = 1$
 6.7 a) $a = 2 \text{ et } b = 3$
 6.7 b) $a = -2 \text{ et } b = 1$
 6.7 c) $a = -3 \text{ et } b = 5$
 6.7 d) $a = 1/2 \text{ et } b = 8$
 6.7 e) $a = 1 \text{ et } b = 3\sqrt{7}$
 6.8 a) $] -\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$
 6.8 b) $[-3, 5]$
 6.8 c) $] -\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$
 6.8 d) $] -\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$

Fiche n° 7. Exponentielle et logarithme

Réponses

7.1 a) $4 \ln 2$
 7.1 b) $9 \ln 2$
 7.1 c) $-3 \ln 2$
 7.1 d) $\frac{1}{2} \ln 2$
 7.1 e) $3 \ln 2$
 7.1 f) $2 \ln 2 + 2 \ln 3$
 7.2 a) $-\ln 3 - 2 \ln 2$
 7.2 b) $2 \ln 3 - 2 \ln 2$
 7.2 c) $\ln 3 + 11 \ln 2$
 7.2 d) $3 \ln 5 + 2 \ln 2$
 7.2 e) $-2 \ln 5 + 4 \ln 2$
 7.2 f) $2 \ln 5 - 2 \ln 2$
 7.3 $-2 \ln 2 - 2 \ln 5$
 7.4 a) $\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$
 7.4 b) $17 + 12\sqrt{2}$
 7.4 c) 0
 7.4 d) 0
 7.5 a) 8

7.5 b) $\frac{1}{2}$
 7.5 c) $\frac{1}{3}$
 7.5 d) $\frac{1}{9}$
 7.5 e) $-\frac{1}{2}$
 7.5 f) $\frac{3}{2}$
 7.6 a) -2
 7.6 b) $\frac{1}{\ln 2}$
 7.6 c) -17
 7.6 d) 1
 7.6 e) -1
 7.6 f) e
 7.7 a) impaire
 7.7 b) impaire
 7.7 c) impaire
 7.7 d) impaire

7.8 a) $\mathbb{R}$
 7.8 b) ok
 7.8 c) 1
 7.8 d) -1
 7.9 a) $x + \ln 2$
 7.9 b) $\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
 7.9 c) $\ln|x-1|$
 7.9 d) $-\frac{1}{1+x}$
 7.9 e) $(1+x)^x$
 7.10 a) $x \geq \frac{\ln 12 + 5}{3}$
 7.10 b) $x \in [0, 1]$
 7.10 c) $x \geq \frac{2}{e}$
 7.10 d) $x \geq -\frac{1}{12}$
 7.10 e) $\emptyset$
 7.10 f) $\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$