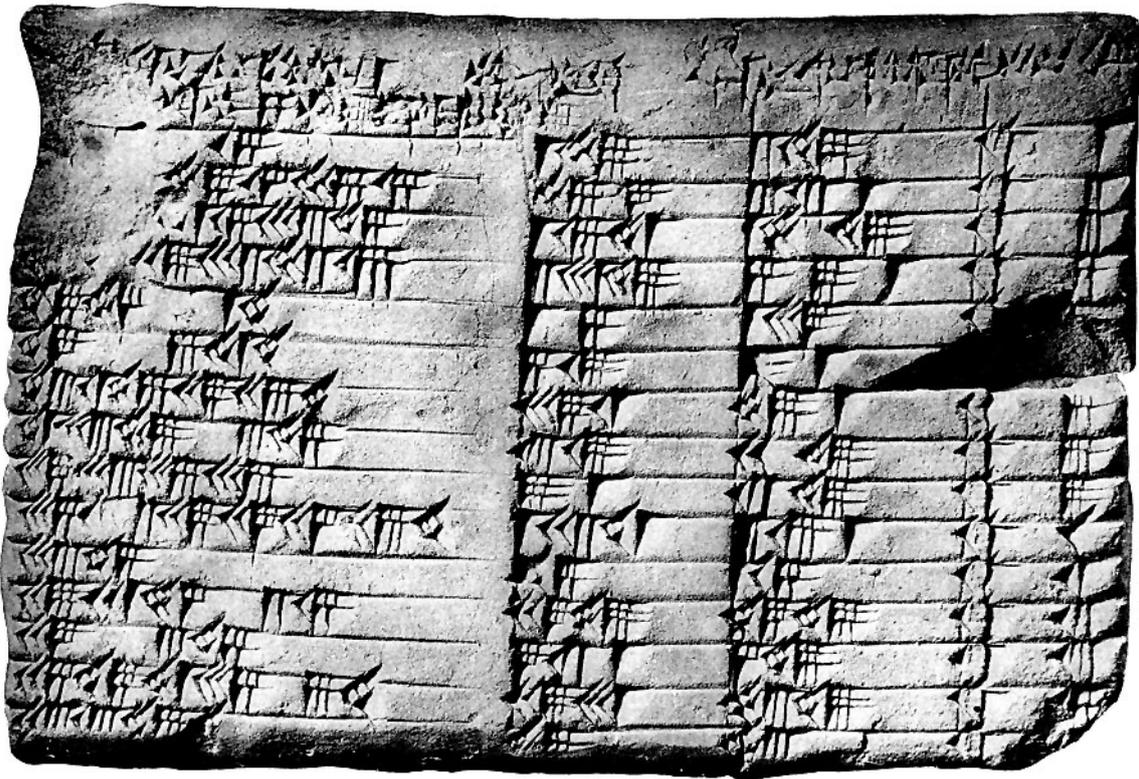


Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Le pictogramme 🕒 de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Version 12 — 20 juillet 2022

Sommaire

<input type="checkbox"/>	1. Fractions.....	1
<input type="checkbox"/>	2. Puissances.....	3
<input type="checkbox"/>	3. Calcul littéral.....	4
<input type="checkbox"/>	4. Racines carrées.....	6
<input type="checkbox"/>	5. Expressions algébriques.....	8
<input type="checkbox"/>	6. Équations du second degré.....	10
<input type="checkbox"/>	7. Exponentielle et logarithme.....	13
<input type="checkbox"/>	8. Trigonométrie.....	16
<input type="checkbox"/>	9. Dérivation.....	18
<input type="checkbox"/>	10. Primitives.....	21
<input type="checkbox"/>	11. Calcul d'intégrales.....	24
<input type="checkbox"/>	12. Intégration par parties.....	26
<input type="checkbox"/>	13. Changements de variable.....	28
<input type="checkbox"/>	14. Intégration des fractions rationnelles.....	30
<input type="checkbox"/>	15. Systèmes linéaires.....	33
<input type="checkbox"/>	16. Nombres complexes.....	35
<input type="checkbox"/>	17. Trigonométrie et nombres complexes.....	36
<input type="checkbox"/>	18. Sommes et produits.....	38
<input type="checkbox"/>	19. Coefficients binomiaux.....	41
<input type="checkbox"/>	20. Manipulation des fonctions usuelles.....	43
<input type="checkbox"/>	21. Suites numériques.....	46
<input type="checkbox"/>	22. Développements limités.....	48
<input type="checkbox"/>	23. Arithmétique.....	50
<input type="checkbox"/>	24. Polynômes.....	52
<input type="checkbox"/>	25. Décomposition en éléments simples.....	54
<input type="checkbox"/>	26. Calcul matriciel.....	57
<input type="checkbox"/>	27. Algèbre linéaire.....	61
<input type="checkbox"/>	28. Équations différentielles.....	64
<input type="checkbox"/>	29. Séries numériques.....	66
<input type="checkbox"/>	30. Structures euclidiennes.....	68
<input type="checkbox"/>	31. Groupes symétriques.....	70
<input type="checkbox"/>	32. Déterminants.....	72
<input type="checkbox"/>	33. Fonctions de deux variables.....	74

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant de voir d'un seul coup d'œil les différentes fiches et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calcul.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés sont dans un second cahier dédié, diffusé selon le choix de votre professeur.

Chaque fiche de calcul est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (●●●●), deux (●●●●), trois (●●●●) ou quatre (●●●●) horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse cahierdecacul@gmail.com. Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à droite de chaque fiche.

Fractions

Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.



Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\frac{32}{40}$

c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$

b) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$

d) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$

b) $\frac{2}{3} - 0,2$

d) $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$

Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$

b) $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$

c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$

d) $\frac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979}$

Calcul 1.4 — Un petit calcul.



Écrire $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\frac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)}$

c) $\frac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235}$

b) $\frac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2}$

d) $\frac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001}$

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a) $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux.
- c) $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.



Simplifier $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.



Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \frac{b}{X}$ avec a et b entiers et $X \in \mathbb{R}$.

- a) $\frac{29}{6}$ b) $\frac{k}{k-1}$... c) $\frac{3x-1}{x-2}$..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.



Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible.

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a) $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$ b) $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$ c) $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$

Calcul 1.11 — Produit en croix.



Les nombres $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux? Oui ou non?

Calcul 1.12 — Produit en croix.



On pose $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$?

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ c) $\frac{10^5}{10^3}$ e) $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$

b) $(10^5)^3$ d) $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$ f) $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$

Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ c) $\frac{2^5}{2^{-2}}$ e) $\frac{6^5}{2^5}$

b) $(5^3)^{-2}$ d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ f) $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$

Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ c) $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$

b) $2^{21} + 2^{22}$ d) $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$

Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ c) $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$

b) $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ d) $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$

Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x .

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$

b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$ d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$

Calcul littéral

Prérequis

Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x .

- | | |
|---|--|
| a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3 \dots\dots\dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1) \dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $(x-1)^3(x^2+x+1) \dots\dots\dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1) \dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1) \dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1) \dots\dots\dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |

Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x .

- | | |
|--|--|
| a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| e) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(1 - \sqrt{2}x + x^2) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| f) $(x^2 + x + 1)^2 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

- | | |
|---|--|
| a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $25 - (10x+3)^2 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ (où $a \neq 0$).

- | | | | |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 2x + 1$ | <input type="text"/> | d) $3x^2 + 7x + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 4x + 4$ | <input type="text"/> | e) $2x^2 + 3x - 28$ | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 3x + 2$ | <input type="text"/> | f) $-5x^2 + 6x - 1$ | <input type="text"/> |

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.



Factoriser sur \mathbb{R} les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | | | |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2$ | <input type="text"/> | d) $xy - x - y + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ | <input type="text"/> | e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$.. | <input type="text"/> |
| c) $xy + x + y + 1$ | <input type="text"/> | f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$.. | <input type="text"/> |

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.



Factoriser sur \mathbb{R} les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $x^4 - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$ | <input type="text"/> |
| c) $x^4 + x^2 + 1$ | <input type="text"/> |
| d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ | <input type="text"/> |
| e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$.. | <input type="text"/> |

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\quad}$ qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(-5)^2}$

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

e) $\sqrt{(3 - \pi)^2}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

f) $\sqrt{(3 - a)^2}$

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$

e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

b) $(2 + \sqrt{5})^2$

f) $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$

c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

g) $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

d) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3



Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$

f) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

g) $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{}$$

Calculs variés**Calcul 4.5 — Avec une variable.**On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$.Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

- | | | | |
|--|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ | <input type="text"/> | d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ | <input type="text"/> |
| b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ | <input type="text"/> | e) $f(x) + 4f''(x)$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{x+2f(x)}$ | <input type="text"/> | f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$ | <input type="text"/> |

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

- | | | | |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ | <input type="text"/> | b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ | <input type="text"/> |
|--|----------------------|--|----------------------|

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ | <input type="text"/> | d) $3e^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ | <input type="text"/> |
| b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ | <input type="text"/> | e) $2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{2}\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ | <input type="text"/> |

Calcul 4.8On note $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$. Simplifier A On commencera par exprimer A^3 en fonction de A

Expressions algébriques

Prérequis

Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a + 2)^3$

c) a^{12}

b) $a^5 - a^6$

d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $i^2 = -1$.Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + iy$ où x, y sont deux réels.

a) $(3 + i)^2$

c) $(3 - i)^3$

b) $(3 - i)^2$

d) $(3 - 2i)^3$

Calcul 5.3



Même exercice.

a) $(4 - 5i)(6 + 3i)$

c) $(-4 + i\sqrt{5})^3$

b) $(2 + 3i)^3(2 - 3i)^3$

d) $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$

c) $\prod_{k=0}^{1234} a^k$

d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$

e) $\sum_{k=1}^{99} a^k$

f) $\prod_{k=0}^4 (2 - a^k)$

Expressions symétriques

Calcul 5.5 — Inverse.



Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \frac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

- a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ b) $x^3 - \frac{1}{x^3}$ c) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

Calcul 5.6 — Trois variables.



Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad \text{et} \quad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

- a) $x^2 + y^2 + z^2$
- b) $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$
- c) $x^3 + y^3 + z^3$
- d) $(x + y)(y + z)(z + x)$
- e) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$
- f) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$

Calcul 5.7



Même exercice.

- a) $x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y)$
- b) $x^4 + y^4 + z^4$
- c) $\frac{x}{(x - y)(x - z)} + \frac{y}{(y - z)(y - x)} + \frac{z}{(z - x)(z - y)}$
- d) $\frac{x^2}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^2}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^2}{(z - x)(z - y)}$
- e) $\frac{x^3}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^3}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^3}{(z - x)(z - y)}$

Équations du second degré

Prérequis

Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.



Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

f) $2x^2 + 3x = 0$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

g) $2x^2 + 3 = 0$

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$

e) $x^2 - 5x = 0$

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$

Calcul 6.2 — Somme et produit.



Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.



Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine

c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine

d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine

Calcul 6.4 — Racine évidente.



Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

- a) $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$
- b) $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$
- c) $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b)$
- d) $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0$
- e) $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$
- f) $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.



En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

- a) 9 et 13
- b) -11 et 17
- c) $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$
- d) $m + \sqrt{m^2 - 3}$ et $m - \sqrt{m^2 - 3}$
- e) $m + 3$ et $\frac{2m - 5}{2}$
- f) $\frac{m + 1}{m}$ et $\frac{m - 2}{m}$

Calcul 6.6 — Avec le discriminant.



Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

- a) $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$
- b) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 = 0$
- c) $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x .

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$

d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$

b) $-x^2 + 2x + 15$

c) $(x + 1)(3x - 2)$

d) $\frac{x - 4}{2x + 1}$

Exponentielles

Calcul 7.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- | | | | |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $e^{3 \ln 2}$ | <input type="text"/> | d) $e^{-2 \ln 3}$ | <input type="text"/> |
| b) $\ln(\sqrt{e})$ | <input type="text"/> | e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ | <input type="text"/> |
| c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ | <input type="text"/> | f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$ | <input type="text"/> | d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{-\ln \ln 2}$ | <input type="text"/> | e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$ | <input type="text"/> |
| c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$ | <input type="text"/> | f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$ | <input type="text"/> |

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

- | | |
|--|----------------------|
| a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021+x}{2021-x}$ | <input type="text"/> |
| b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ | <input type="text"/> |
| c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ | <input type="text"/> |
| d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.



Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- | | |
|---|----------------------|
| a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. | <input type="text"/> |
| b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ | <input type="text"/> |
| c) Déterminer la limite de f en $+\infty$ | <input type="text"/> |
| d) Déterminer la limite de f en $-\infty$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- a) $f(2e^x - 1)$ d) $xf'(x) - 1$
- b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$
- c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$

Équations, inéquations

Calcul 7.10



Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

- a) $e^{3x-5} \geq 12$
- b) $1 \leq e^{-x^2+x}$
- c) $e^{1+\ln x} \geq 2$
- d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$
- e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$
- f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$